Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX **Option : Spéciales M**

PROBLÈME A

I

On considère la matrice :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $P(X) = \text{dét}(M_3 - XI_3)$ de la matrice M_3 (on note I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

2. Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles strictement positives (on ne cherchera pas à calculer ces racines).

3. Montrer que la matrice M_3 est diagonalisable et inversible.

II

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément f de $\mathcal{E}$, on associe l'application Φ_f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Phi_f(x, y, z) = \int_0^1 (x + yt + zt^2 - f(t))^2 \, dt.$$

1. Exprimer, sous forme d'intégrales, les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_f}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_f}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi_f}{\partial z}$ de Φ_f en un point (x, y, z).

2. *a.* Montrer qu'un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ annule simultanément les trois dérivées partielles de Φ_f si et seulement si il est solution du système :

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(t)\,dt \\ \int_0^1 t f(t)\,dt \\ \int_0^1 t^2 f(t)\,dt \end{pmatrix}$$

où M_3 est la matrice de la partie I.

b. En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point, que l'on notera $A(f) = (a_f, b_f, c_f)$.

c. En étudiant le signe de la différence $\Phi_f(a_f + x, b_f + y, c_f + z) - \Phi_f(a_f, b_f, c_f)$, montrer que $\Phi_f(a_f, b_f, c_f)$ est la valeur minimale prise par Φ_f sur $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer a_f, b_f, c_f lorsque f est la fonction définie par $f(t) = \sin(\pi t)$.

III

Dans toute la suite du problème, on fixe un entier naturel $n \geqslant 3$ et on note E_{n-1} le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des fonctions polynômes de degré $\leqslant n - 1$.

1. Vérifier qu'on munit $\mathscr{E}$ d'un produit scalaire en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}, \quad (f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire, c'est-à-dire : $\forall f \in \mathscr{E}, \quad \|f\| = \sqrt{(f|f)}$.

2. Justifier que l'on peut définir, pour tout élément f de $\mathscr{E}$, la projection orthogonale de f sur E_{n-1}, que l'on notera $\Pi_{n-1}(f)$.

3. À tout élément f de $\mathscr{E}$, on associe l'application Φ_f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi_f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1} t^{n-1} - f(t))^2\, dt.$$

a. Montrer que Φ_f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$, atteint en un point unique, que l'on notera :

$$A(f) = (a_0(f), \ldots, a_{n-1}(f)).$$

b. Montrer que le n-uplet $(a_0(f), \ldots, a_{n-1}(f))$ est solution d'un système linéaire à n équations dont la matrice est :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

4. *a.* Soit $P_0, \ldots, P_{n-1}$ la base de E_{n-1} définie par $P_i(t) = t^i$.

Montrer que M_n représente la matrice sur la base $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ du produit scalaire sur E_{n-1} défini par :

$$\forall\ (P, Q) \in E_{n-1} \times E_{n-1},\quad (P\,|\,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt.$$

b. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de la matrice M_n ?

5. *a.* Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note L_k la fonction polynôme définie par :

$$L_k(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left(t^k(1-t)^k\right)$$

(c'est-à-dire la dérivée k-ième de la fonction polynôme $t \longmapsto t^k(1-t)^k$).

Montrer que $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de E_{n-1}. Préciser le degré de L_k et le coefficient du terme de plus haut degré.

b. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. À l'aide de plusieurs intégrations par parties, calculer les produits scalaires $(L_k\,|\,P_i)$ pour $i \leqslant k$.

c. En déduire que la base $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est orthogonale et que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\quad (L_k\,|\,L_k) = \frac{(k!)^2}{2k+1}.$$

d. On note P la matrice de passage de la base $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ à la base $(P_0, \ldots, P_{n-1})$. Montrer que P est triangulaire supérieure, et préciser ses coefficients diagonaux.

e. Déterminer une matrice diagonale D telle que $M_n = {}^tPDP$, et en déduire la valeur du déterminant de M_n.

IV

1. *a.* Soit toujours n un entier naturel, $n \geqslant 3$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme T_{n-1} de E_{n-1} tel que : $\forall P \in E_{n-1}$, $(P\,|\,T_{n-1}) = P(0)$.

b. Montrer que le n-uplet des coefficients de T_{n-1} est solution d'un système linéaire à n équations dont la matrice est la matrice M_n de la partie **III.**

2. *a.* $\mathscr{E}$ étant toujours muni de la norme définie en **III.1.**, montrer que, pour tout φ appartenant à $\mathscr{E}$, l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$, qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $(f\,|\,\varphi)$, est continue sur $\mathscr{E}$.

b. En déduire qu'il n'existe pas d'élément φ de $\mathscr{E}$ tel que $\forall f \in \mathscr{E}$, $(f\,|\,\varphi) = f(0)$.

PROBLÈME B

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et on pose pour tout réel x :

$$g_\alpha(x) = \int_0^x \exp(-\alpha t^2)\,dt.$$

On ne cherchera pas une expression explicite de $g_\alpha(x)$.

1. Montrer que g_α est développable en série entière au voisinage de 0 ; donner son développement en série entière et préciser le rayon de convergence.

2. Résoudre l'équation différentielle.

   (1) $\qquad y'' + 2xy' = a$ où a désigne un réel fixé.

   (On exprimera la solution générale à l'aide d'intégrales.)

3. Déterminer les solutions de (1) développables en série entière.

4. On pose $f(x) = (g_1(x))^2 = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$.

   a. Justifier que f est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

   Soit : $\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$

   Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4. (On ne donnera pas l'expression de a_n pour tout n.)

   b. Montrer que f est de classe C^∞ et calculer f'.

5. On pose pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt.$$

   a. Justifier que φ est bien définie.

   b. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.

   c. Trouver la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$.

6. *a.* Montrer que $h = \varphi + f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt$.

7. On prend dans cette question $\alpha > 0$.

   a. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \exp(-\alpha t^2)\,dt$ converge et donner sa valeur.

   b. Étudier les variations de g_α. Tracer son graphe pour $\alpha = \frac{1}{2}$.